Test composto da 5 domande

4 possibili risposte per ciascuna domanda delle quali una sola è corretta.

$$\text{Punteggio} = \begin{cases} 1 & \text{se la risposta è esatta} \\ -\frac{1}{4} & \text{se la risposta è sbagliata} \end{cases}$$

Un concorrente risponde a caso a ogni domanda

Calcolare

(a) Prob di ottenere un totale di 2.5 punti

(b) Punteggio medio

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'iesima risposta è corretta} \\ 0 & \text{se no} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3, 4, 5$ indip

$$\boxed{X_i \sim B\left(1, \tfrac{1}{4}\right) \text{ indip}}$$

$U =$ n° di risposte corrette

$$\boxed{U = \sum_{i=1}^{5} X_i \sim B\left(5, \tfrac{1}{4}\right)}$$

Z = punteggio ottenuto

$$Z = U - \frac{1}{4}(5-U) =$$

$$= \frac{5}{4}U - \frac{5}{4} = \frac{5}{4}(U-1)$$

(a) $P(Z = 2.5) =$

$$= P\left(\frac{5}{4}(U-1) = \frac{5}{2}\right) =$$

$$= P\left(U-1 = 2\right) =$$

$$P\left(U = 3\right) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$$

(b) $$E[Z] = \sum_z z P(Z=z)$$

2.5

$$= E\left[\frac{5}{4}(U-1)\right] =$$

$$= E\left[\frac{5}{4}U - \frac{5}{4}\right] =$$

$$= E\left[\frac{5}{4}U\right] + E\left[-\frac{5}{4}\right]$$

$$X \equiv c \qquad P(X=c)=1$$

$$E[c] = c\,P(X=c) =$$

$$c \cdot 1 = \underline{\underline{c}}$$

$$\underline{\underline{E\left[\frac{5}{4}U\right] + E\left[-\frac{5}{4}\right]}} = \frac{5}{4}E[U] - \frac{5}{4} =$$

$$= \frac{5}{4}\left(\frac{5}{5}\cdot\frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4} = \underline{\underline{\frac{5}{16}}}$$

Un'urna contiene all'inizio
1 pallina bianca e 1 nera.

Ad ogni passo, se esce nera $\longrightarrow$ STOP

se esce bianca $\longrightarrow$ rimetto la p. bianca
nell'urna e aggiungo
un'altra bianca
e vado avanti

$T =$ n° di estrazioni necessarie per ottenere
la p. nera

Calcolare la densità di T e dire se ammette media finita.

T prende i valori interi ≥ 1

$P(T=k) \quad k = 1, 2, 3, 4, \ldots$

$$P(T=1) = \frac{1}{2}$$

$$P(T=2) =$$

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa alla } k\text{-esima estraz.} \\ 0 & \text{se no} \end{cases}$$

$$\{T=2\} = \{X_1 = 0 \overset{\cap}{,} X_2 = 1\}$$

$$P(T=2) = P(\underbrace{X_1 = 0}, \underbrace{X_2 = 1}) =$$

$$= P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) \cdot \underbrace{P(X_1 = 0)}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$P(T=3) =$$

$$= P(X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = 0) =$$

$$= P(X_3 = 1 \mid X_2 = 0, X_1 = 0) \cdot$$

$$\cdot \underbrace{P(X_2 = 0, X_1 = 0)}_{=\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(T=4) = \frac{1}{5 \cdot 4}$$

$$P(T=k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{5} \longrightarrow P(X_4 = 1 \mid X_3 = 0, X_2 = 0, X_1 = 0)$$

$$\longrightarrow P(X_3 = 0, X_2 = 0, X_1 = 0)$$

$$P(X_2=0, X_1=0) =$$

$$= P(X_2=0 \mid X_1=0)\, P(X_1=0)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$P(T=k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$P(X_1=0, \ldots, X_k=0) = \frac{1}{k}$$

$$P(X_1=0, \ldots, X_k=0, X_{k+1}=0) =$$

$$\frac{\cancel{1}}{k+1} = P(X_{k+1}=0 \mid \ldots\ldots)\, P(\ldots\ldots) = \frac{1}{k+1}$$

$$E[T] = \sum k \, P(T=k) < \infty \; ?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \, P(T=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \cancel{k} \frac{1}{\cancel{k}(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{h} = +\infty$$

$$\sum \frac{1}{k^{\alpha}} \text{ è divergente per } \alpha \leq 1$$

$$\boxed{P(T=k)}$$

$$P(T>k)$$

$$\{T>1\}=\{X_1=0\}$$

$$\{T > 2\} = \{X_1 = 0, X_2 = 0\}$$

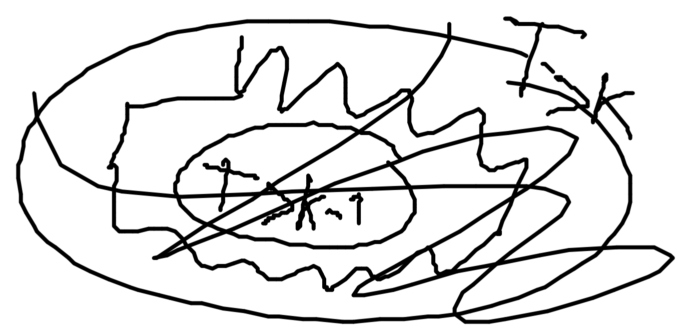
$$\{T > k\} = \{X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_k = 0\}$$

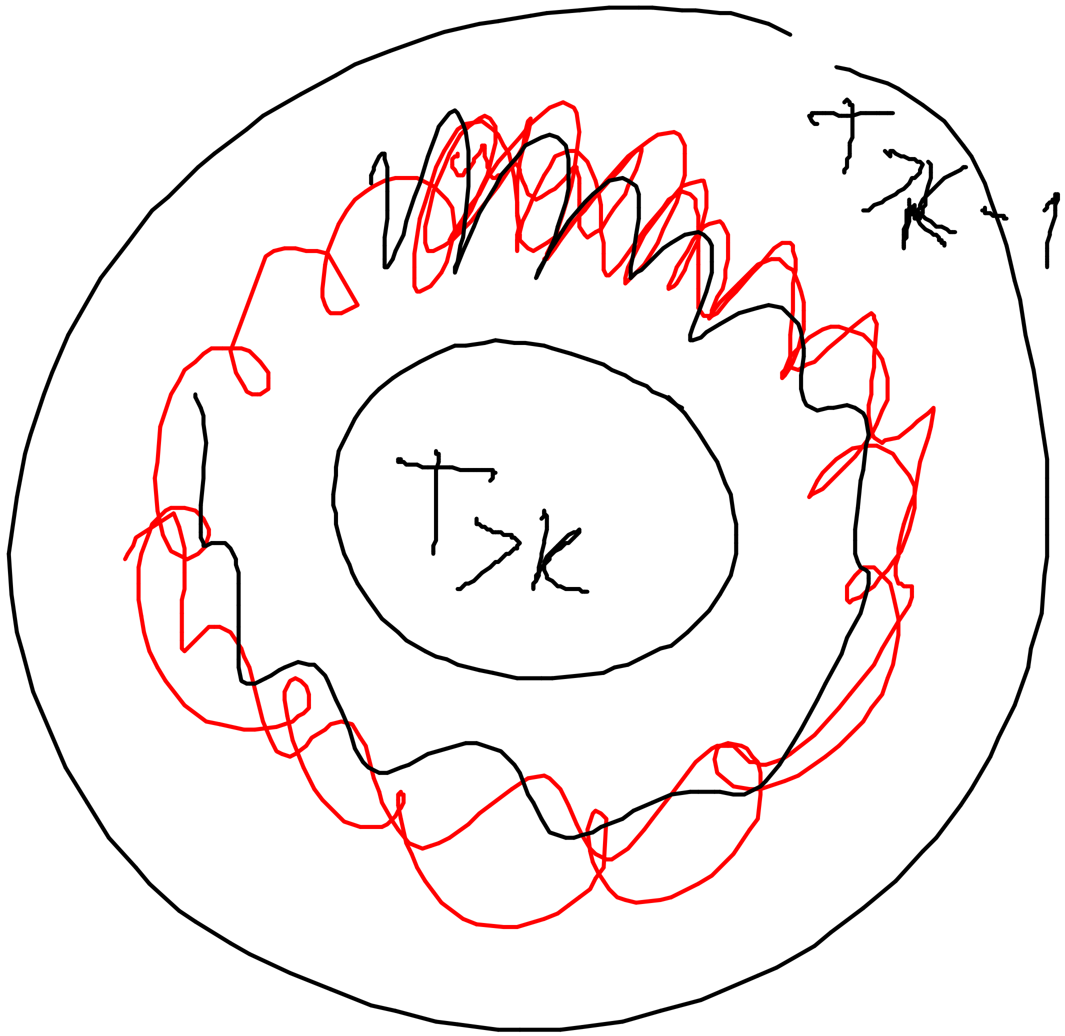
$$P(T > k) = \frac{1}{k+1}$$

$$\{T=k\} = \{T>k-1\} \setminus \{T>k\}$$

$$\{T>k\}$$

$$P(T=k) = P(T>k-1) - P(T>k)$$





$$P(T=k) = P(T>k-1) - P(T>k)$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5. Si scelgono 2 a caso. Scrivere Ω.

X = n° della 1ª estratta

Y = n° della 2ª estr.

Calc. la densità congiunta di X e $X+Y$

$$(X, X+Y)$$

$$\operatorname{Im} X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{Im}\{X+Y\} = \{3,4,5,6,7,8,9\}$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ _ Basta calcolare

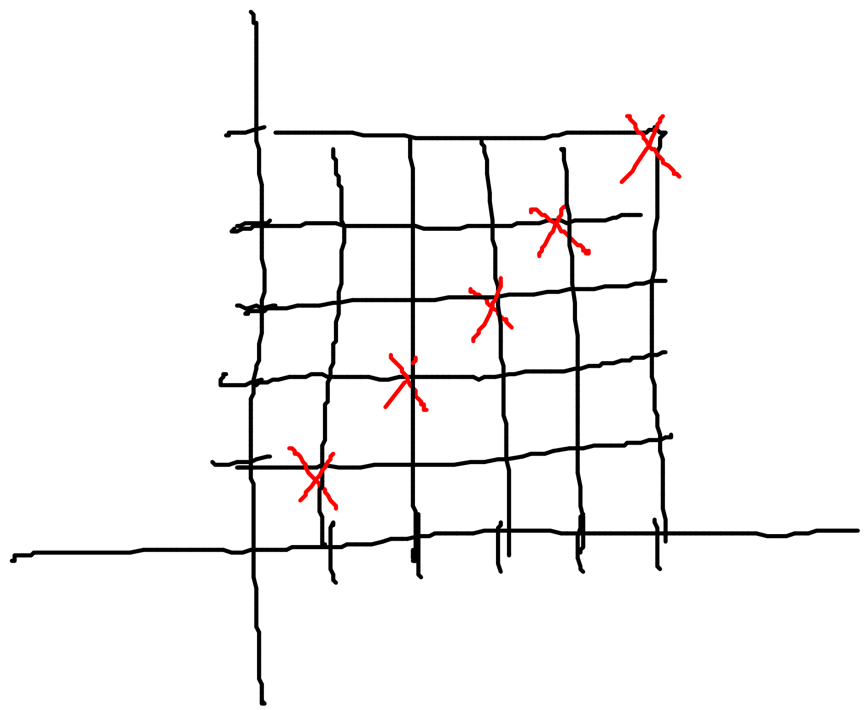
$$p(x,y) = P(X=x, X+Y=y)$$

$\forall (x,y) \in \{1,2,3,4,5\} \times \{3,4,\ldots,9\}$

$x \in A$ $\quad$ $y \in B$ $\quad$ $(x,y) \in A \times B$

$$p(1,5) = P(X=1, X+Y=5) =$$

$$= P(X=1, Y=4) = \frac{1}{20}$$



$$P(X=h, X+Y=k) =$$

$$= P(\underbrace{X=h}, Y=\underbrace{k-h}) = \frac{1}{20}$$

$h = 1, \dots 5$

$k-h = 1, \dots 5, \quad k-h \neq h$

$h=3 \qquad k=6 \qquad 2h \neq k$

2% dei pezzi prodotti
da una ditta è difettoso
Scatole da 100 pezzi
Se 3 o più pezzi sono difettosi
si ritira la scatola

$$P(X \geq 3) =$$
$$= 1 - P(X \leq 2) =$$
$$\rightarrow X \sim B\left(100, \frac{2}{100}\right)$$
$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$
$$=$$

$$= 1 - \binom{100}{0}\left(\frac{2}{100}\right)^0\left(\frac{98}{100}\right)^{100} -$$

$$- \binom{100}{1}\left(\frac{2}{100}\right)^1\left(\frac{98}{100}\right)^{99} -$$

$$- \binom{100}{2}\left(\frac{2}{100}\right)^2\left(\frac{98}{100}\right)^{98}$$

Calcolare la prob. che una data scatola debba essere ritirata.

X = n° pezzi difettosi

$P(X \geq 3)$

$$X \sim B\left(\underbrace{n}, \underbrace{\frac{\lambda}{n}}\right)$$

con n "grande"

$$n \cdot \frac{\lambda}{n} = \lambda$$

$$X \sim \Pi_{\lambda}$$

$$X \sim \Pi_{2}$$

$$X \sim B(N, p)$$

$X \sim \Pi_{\lambda = Np}$ N grande p piccolo

$$X \sim \Pi_2$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) -$$

$$- P(X=1) - P(X=2)$$

$$= 1 - e^{-2} - 2e^{-2} - \frac{4}{2!}e^{-2} =$$

$$= 1 - e^{-2}(1+2+2) = 1 - 5e^{-2}$$

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$